INFOCUS
Revista Multidisciplinar de Ciências Gerais

ISSN 2966-2125

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE CAMPO DE SCHWARZCHILD VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: UMA APLICAÇÃO AO ESTUDO DOS BURACOS NEGROS SUPERMASSIVOS

Raphael Lima Sodré[1]
Leonardo Moraes Armesto²

RESUMO: Este artigo científico apresenta uma revisão panorâmica da aplicação do Método das Diferenças Finitas (MDF) para a obtenção de soluções numéricas das equações de campo de Einstein da Teoria da Relatividade Geral (TRG), concentrando-se especificamente na métrica de Schwarzschild e suas aplicações no estudo das "estrelas negras" (buracos negros). A TRG, formulada por Albert Einstein e publicada em 1915, faz uma nova releitura da gravidade, redefinindo-a como sendo uma consequência da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia, representando um marco excêntrico e inovador na Física Teórica. No entanto, devido à complexidade matemática das equações de campo de Einstein, a maioria das soluções analíticas exatas se torna impraticável, exigindo a implementação de métodos numéricos eficazes. O objetivo geral deste estudo é revisar e analisar criticamente as abordagens numéricas baseadas no MDF, uma técnica amplamente reconhecida por sua simplicidade e adaptabilidade na discretização de equações diferenciais parciais, conforme descrito por Press *et al*. (1992). Este método se destaca na modelagem de problemas complexos, como a métrica de Schwarzschild, que descreve a geometria do espaço-tempo em torno de um corpo esférico não-rotativo, essencial para a compreensão fenomenológica desses objetos astronômicos tão exóticos, intrigantes e peculiares; os buracos negros. Os resultados esperados incluem a identificação de metodologias numéricas eficazes e uma avaliação crítica das vantagens e limitações do MDF, especialmente em cenários astrofísicos em que a precisão e a robustez das soluções são cruciais. Além disso, o estudo busca delinear os desafios atuais e as perspectivas futuras na aplicação dessas técnicas numéricas para a exploração de fenômenos gravitacionais extremos. A metodologia utilizada é uma revisão bibliográfica quantitativa, baseada na análise de estudos teóricos e experimentais relevantes. Este enfoque permite uma síntese e avaliação crítica da literatura existente, oferecendo insights valiosos para o aprimoramento das abordagens numéricas no contexto da TRG. Este artigo contribui para o avanço do conhecimento científico, oferecendo uma base sólida para futuras investigações sobre a aplicação de métodos numéricos na solução das equações de campo de Einstein e na compreensão dos buracos negros.

PALAVRAS-CHAVE: EJA. Ensino de física. Neurociência. PNL. Transtornos de aprendizagem.

ABSTRACT: This scientific article presents an overview of the application of the Finite Difference Method (FDM) to obtain numerical solutions of Einstein's field equations of the General Theory of Relativity (GRT), focusing specifically on the Schwarzschild metric and its applications in the study of "black stars" (black holes). The GRT, formulated by Albert Einstein and published in 1915, gives a new interpretation of gravity, redefining it as a consequence of the curvature of space-time caused by the presence of mass and energy, representing an eccentric and innovative milestone in theoretical physics. However, due to the mathematical complexity of Einstein's field equations, most exact analytical solutions become impractical, requiring the implementation of effective numerical methods. The overall aim of this study is to review and critically analyze numerical approaches based on MDF, a technique widely recognized for its simplicity and adaptability in discretizing partial differential equations, as described by Press et al. (1992). This method stands out in the modeling of complex problems,

[1]Graduado em Licenciatura em Física. Especialista em Ensino de Física. Especialista em Ensino de Ciências. Especialista em Ciências da Natureza, suas Tecnologias e o Mundo do Trabalho. Especialista em Ensino de Astronomia. Professor efetivo de Física do Colégio Polivalente de Caravelas-BA. Email: rl.sodre1@gmail.com.
²Orientador: Doutor e Mestre em Engenharia, Multigraduado, Multiespecialista e Coordenador Pedagógico de Pós-Graduação e Pesquisa. Orientador e Professor de Trabalhos de Curso. E-mail: leonardo.armesto@faculdadefocus.com.br.

such as the Schwarzschild metric, which describes the geometry of space-time around a non-rotating spherical body, essential for the phenomenological understanding of those astronomical objects that are so exotic, intriguing and peculiar; black holes. The expected results include the identification of effective numerical methodologies and a critical evaluation of the advantages and limitations of MDF, especially in astrophysical scenarios where the accuracy and robustness of the solutions are crucial. In addition, the study seeks to outline the current challenges and future prospects in the application of these numerical techniques to the exploration of extreme gravitational phenomena. The methodology used is a quantitative literature review, based on the analysis of relevant theoretical and experimental studies. This approach allows a synthesis and critical evaluation of the existing literature, offering valuable insights for the improvement of numerical approaches in the context of TRG. This article contributes to the advancement of scientific knowledge by providing a solid basis for future investigations into the application of numerical methods to the solution of Einstein's field equations and the understanding of black holes.

KEYWORDS: EJA. Physics teaching. Neuroscience. NLP. Learning disorders.

INTRODUÇÃO

A proposta deste artigo é apresentar uma revisão abrangente sobre a aplicação do Método das Diferenças Finitas (MDF) para a obtenção de soluções numéricas das equações de campo de Einstein, com ênfase na métrica de Schwarzschild e suas implicações no estudo de buracos negros não-rotativos. A Teoria da Relatividade Geral (TRG), proposta por Einstein em 1915, revolucionou a compreensão da gravitação ao descrever a interação gravitacional como uma curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. Entretanto, a solução analítica exata das equações de campo de Einstein é, na maioria das vezes, inviável devido à sua complexidade matemática. Isso torna necessário o desenvolvimento e a aplicação de métodos numéricos que possam aproximar essas soluções com precisão adequada.

A motivação para esta pesquisa decorre da crescente importância dos buracos negros na Astrofísica moderna e na Cosmologia, bem como da necessidade de métodos computacionais robustos para investigar tais fenômenos. Buracos negros, como descritos pela métrica de Schwarzschild, são soluções simples, mas profundas, das equações de campo de Einstein para uma massa esférica não rotacional. Esses objetos cósmicos desempenham um papel crucial na compreensão da estrutura do Universo e na investigação de aspectos fundamentais da Física, como a singularidade gravitacional e os horizontes de eventos.

A relevância científica deste estudo reside na possibilidade de aprimorar as técnicas numéricas aplicadas à TRG, proporcionando uma ferramenta valiosa para a exploração de sistemas gravitacionais extremos. Segundo Chandrasekhar (1983), o estudo dos buracos negros não apenas testa os limites da teoria gravitacional de Einstein, mas também desafia nossa compreensão da Física em condições de extrema densidade e gravidade. Além disso, Press *et al*. (1992) destacam que o MDF é amplamente utilizado em diversos problemas de Física Matemática devido à sua simplicidade e adaptabilidade na discretização de equações diferenciais.

O objetivo geral deste artigo é revisar e analisar criticamente as abordagens numéricas baseadas no MDF para a solução das equações de campo de Einstein, com especial atenção à métrica de Schwarzschild que se aplicam perfeitamente aos buracos negros não rotacionais, aos quais são objetos de estudo matemático desta pesquisa. Para alcançar este objetivo, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Descrever a formulação matemática da métrica de Schwarzschild no contexto da TRG;
- Analisar a implementação do MDF na solução das equações de campo de Einstein;
- Discutir a precisão e estabilidade das soluções numéricas obtidas pelo MDF;
- Avaliar as aplicações práticas das soluções numéricas na Astrofísica, especialmente em relação a buracos negros;
- Identificar os desafios e as perspectivas futuras na aplicação do MDF em problemas complexos de TRG.

A problematização da pesquisa centra-se na seguinte questão: *"como a aplicação MDF pode aprimorar a precisão das soluções numéricas das equações de campo de Einstein, particularmente em cenários envolvendo buracos negros não-rotativos?"* A hipótese formulada é que o MDF, quando corretamente implementado e ajustado, oferece uma abordagem numérica robusta e eficaz para a resolução dessas equações em condições extremas.

A abordagem metodológica adotada neste estudo é uma revisão bibliográfica panorâmica do tipo quantitativa, que se baseia na análise de literatura relevante, incluindo estudos teóricos e resultados numéricos publicados. Este tipo de estudo permite uma avaliação abrangente das técnicas existentes e das suas aplicações, fornecendo uma base sólida para o desenvolvimento de futuras pesquisas na área.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A gravidade como consequência do espaço-tempo curvo

A TRG, proposta por Albert Einstein em 1915, é um dos pilares da Física Moderna, ampliando a Teoria da Gravitação de Newton para incorporar o conceito de espaço-tempo curvo. Diferente da visão clássica de Newton, no qual a gravidade é

INFOCUS
Revista Multidisciplinar de Ciências Gerais
ISSN 2966-2125

tratada como uma força entre massas que atua à distância, a TRG descreve a gravidade fenomenologicamente e matematicamente como sendo uma manifestação da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. E essa curvatura afeta a trajetória de objetos e a passagem do tempo (Einstein, 2011; Campos, 2012).

No contexto da TRG, objetos com massa deformam o tecido do espaço-tempo (Einstein, 2011; Campos, 2012). Imagine uma bola pesada colocada sobre uma folha elástica: ela cria uma depressão, e outros objetos, ao se moverem próximos a essa depressão, seguirão trajetórias curvas. Esse efeito pode ser entendido de forma qualitativa como a "gravidade" segundo a Relatividade Geral: a massa deforma o espaço-tempo, e essa deformação determina o movimento dos corpos. A teoria está baseada em dois princípios fundamentais:

1. *Princípio da Equivalência*: não há distinção local entre a aceleração causada pela gravidade e a aceleração resultante de movimento dos corpos;
2. *Geometria do Espaço-Tempo*: o espaço-tempo é descrito por uma variedade curva de quatro dimensões (03 espaciais e 01 temporal), onde a curvatura é determinada pela matéria e energia contidas nela.

De acordo com Einstein, a presença de um corpo massivo como o Sol provoca uma curvatura no espaço-tempo ao seu redor, e a trajetória de outros corpos é determinada por essa curvatura (Einstein, 2011), em que suas equações de campo expressam a relação entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de massa e energia, conforme equação abaixo (Chandrasekhar, 1983; Einstein, 2011; Campos, 2012):

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\,\pi\,G}{c^4}\,T_{\mu\nu} \tag{1}$$

Onde:

- $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein;
- $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento, que descreve a distribuição de massa e energia no espaço-tempo;
- G é a constante gravitacional;
- c é a velocidade da luz no vácuo.

Essas equações são não lineares e complexas, dificultando a obtenção de soluções exatas para casos gerais (Misner; Thorne; Wheeler, 1973).

ISSN 2966-2125

A teoria foi confirmada por várias experiências, incluindo a observação do desvio da luz das estrelas pela gravidade do Sol e a precessão do periélio de Mercúrio (Chandrasekhar, 1983). A TRG também introduziu conceitos revolucionários, como buracos negros e ondas gravitacionais, que têm sido amplamente estudados e confirmados por observações recentes.

A Matemática por trás da TRG é baseada no formalismo do Cálculo Diferencial e Integral em Variedades Curvas e no conceito de Tensores. A equação fundamental da Relatividade Geral é a famosa Equação de Campo de Einstein, que relaciona a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de massa e energia (Chandrasekhar, 1983; Einstein, 2011; Campos, 2012; Oliveira, 2015; Weber, 2015), conforme pode ser vista na Equação 2 abaixo:

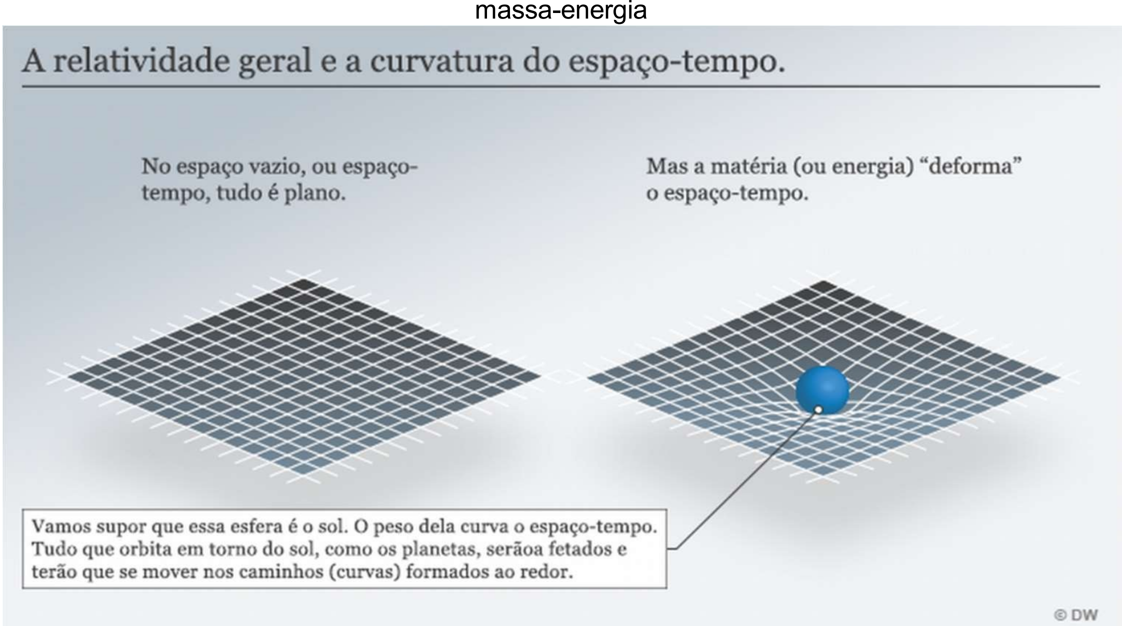
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \frac{8\,\pi\, G}{c^4}\, T_{\mu\nu} \tag{2}$$

Onde:

- $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci;
- R é o escalar de Ricci (ou curvatura escalar);
- $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico.

Esse formato da Equação 2 é a forma clássica da equação de campo de Einstein e não leva em consideração a "constante cosmológica", Λ, que, quando não nula, está associada à energia do vácuo ou à expansão acelerada do Universo.

Figura 1. Representação bidimensional da curvatura do espaço-tempo devido à presença da massa-energia

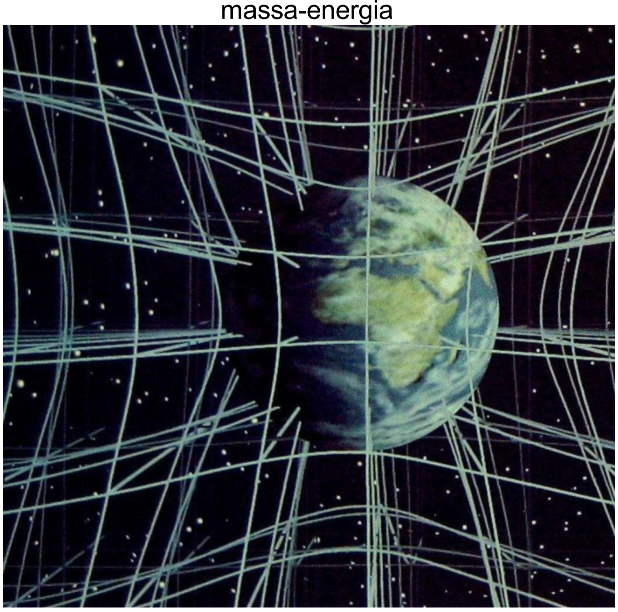


Fonte: Zulfikar Abbany (2015)

ISSN 2966-2125

A Figura 1 acima ilustra como a presença da massa-energia pode deformar o espaço tempo ao seu redor. Claro que, no caso desta imagem, tem-se uma representação plana. No entanto, há representações tridimensionais, conforme ilustra o esquema da Figura 2 abaixo.

Figura 2. Representação tridimensional da curvatura do espaço-tempo devido à presença da massa-energia



Fonte: Ethan Siegel (2019)

Na formulação da TRG, Einstein previu quantitativamente a curvatura da luz ao passar por um campo gravitacional intenso. Quatro anos após a publicação dessas teorias, em 1919, o astrônomo britânico Arthur Eddington liderou uma expedição para medir a deflexão da luz das estrelas causada pela gravidade do Sol durante um eclipse solar total, com observações realizadas em diferentes locais, incluindo Sobral, no Ceará, Brasil (Campos, 2012; Novello, 2015). As medições obtidas por Eddington confirmaram empiricamente as previsões de Einstein.

Essas confirmações experimentais aceleraram a aceitação quase universal das teorias de Einstein no meio científico. Embora diversos físicos tenham, ao longo do tempo, tentado refutar ou encontrar falhas na teoria da relatividade geral, até o presente momento, todas as tentativas se mostraram infrutíferas.

2.2 Uma compreensão acerca das "estrelas negras" (buracos negros)

Buracos negros são regiões do espaço-tempo onde a gravidade é tão intensa que nada, nem mesmo a luz, pode escapar. Nisso, temos a equação de Schwarzschild, que é uma solução específica das equações de campo de Einstein na TRG. Ela descreve o campo gravitacional gerado por uma massa esférica não rotativa, como uma estrela ou um buraco negro, em uma região esférica ao seu

ISSN 2966-2125

redor. Essa solução é fundamental para o entendimento da gravidade em torno de corpos massivos e tem implicações importantes na Astrofísica e na Cosmologia, e suas propriedades são fundamentais para a compreensão dos buracos negros em geral (Schwarzschild, 1916).

A métrica de Schwarzschild, que descreve a geometria do espaço-tempo ao redor de uma massa esférica não rotativa, é dada por (Schwarzschild, 1916):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\,G\,M}{r\,c^2}\right) c^2\,dt^2 + \left(1 - \frac{2\,G\,M}{r\,c^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\,sen^2\theta\,d\phi^2 \quad (3)$$

Onde (Schwarzschild, 1916; Chandrasekhar, 1983; Oliveira, 2015):

- M é a massa do buraco negro;
- r é a coordenada radial;
- θ e ϕ são as coordenadas angulares.

Essa métrica descreve como o espaço-tempo é curvado pela presença de uma massa esférica, como uma estrela ou buraco negro, e é crucial para o estudo de buracos negros e fenômenos relacionados. A fronteira esférica ao redor do buraco negro, conhecida como horizonte de eventos, marca o ponto sem retorno além do qual nada pode escapar.

Estudos sobre buracos negros também incluem buracos negros rotacionais e carregados, descritos pelas soluções de Kerr e Reissner-Nordström, respectivamente (Kerr, 1963; Reissner; Nordström, 1916). As observações indiretas, como a imagem do buraco negro no centro da galáxia M87 capturada pelo *"Event Horizon Telescope"*, têm proporcionado evidências empíricas robustas para a existência e as características desses objetos extremos (Event Horizon Telescope Collaboration, 2019).

2.3 O Método das Diferenças Finitas

O MDF é uma técnica numérica utilizada para resolver equações diferenciais parciais por meio da discretização do domínio contínuo (Silva, 2017; Lima, 1999; Santos, 2018; Santos, 2001; Ribeiro, 2016; Martins, 2014). É amplamente empregado na solução de problemas de Física Matemática, incluindo a resolução das equações de campo de Einstein (Campos, 2012; Novello, 2015).

A ideia central do método é substituir as derivadas nas equações diferenciais por diferenças finitas aproximadas. Por exemplo, para uma equação diferencial ordinária, a derivada dy/dx pode ser aproximada por (Press *et al.*, 1992; Silva, 2015; Martins, 2014):

INFOCUS
Revista Multidisciplinar de Ciências Gerais
ISSN 2966-2125

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (4)$$

Onde:

- h é o passo da malha;
- y_i é o valor da função na i-ésima posição.

Na aplicação ao problema das equações de campo de Einstein, a região do espaço-tempo é discretizada em uma malha, e as equações são resolvidas iterativamente para obter a solução aproximada.

A precisão do MDF depende do tamanho da malha e da ordem das diferenças finitas utilizadas (Martins, 2014). Embora seja relativamente simples de implementar, o método enfrenta desafios em termos de estabilidade e precisão, especialmente para equações não lineares e problemas com condições de contorno complexas (Lima, 1999).

3. METODOLOGIA

Este capítulo descreve em detalhes a abordagem metodológica adotada para a elaboração deste artigo, que é do tipo revisão de literatura, com foco na aplicação do MDF para a solução numérica das equações de campo de Einstein, especialmente no contexto da métrica de Schwarzschild e suas aplicações em buracos negros não-rotativos. A metodologia aqui apresentada segue rigorosamente os princípios da pesquisa científica conforme Lakatos e Marconi (2021; 2022a; 2022b), Creswell e Creswell (2021) e Gil (2023), abordando as etapas de levantamento bibliográfico, seleção de materiais, análise e síntese crítica dos resultados encontrados.

3.1 Abordagens Metodológicas

A pesquisa realizada é de natureza qualitativa e quantitativa, com ênfase em uma revisão de literatura crítica e aprofundada. Segundo Lakatos e Marconi (2021; 2022a; 2022b), Creswell e Creswell (2021) e Gil (2023), a revisão de literatura tem como objetivo fornecer uma compreensão abrangente do estado atual do conhecimento sobre um determinado tema, identificando lacunas, tendências e oportunidades para novas pesquisas. Essa metodologia é particularmente relevante para estudos que buscam consolidar e interpretar teorias complexas, como a TRG e suas aplicações em buracos negros.

3.2 Levantamento Bibliográfico

O primeiro passo consistiu no levantamento bibliográfico exaustivo de obras

ISSN 2966-2125

relevantes sobre a TRG, buracos negros e o MDF. A pesquisa incluiu a consulta a livros, artigos científicos, teses e dissertações publicadas em fontes confiáveis, como periódicos indexados, bases de dados como Scopus, IEEE Xplore e Google Scholar, e bibliotecas digitais de universidades renomadas.

As principais referências teóricas incluíram obras de Einstein (2011), Chandrasekhar (1983), Schwarzschild (1916), além de publicações recentes que discutem o desenvolvimento e as aplicações do MDF, como os trabalhos de Press *et al*. (1992), Lima (1999), Silva (2017), Santos (2018), Santos (2001), Ribeiro (2016) e Martins (2014). Esse levantamento foi essencial para garantir que todas as abordagens relevantes fossem consideradas e que o artigo estivesse fundamentado nas mais recentes contribuições científicas.

3.3 Seleção e Análise de Materiais

Com base no levantamento bibliográfico, foi realizada uma seleção criteriosa dos materiais que compõem o corpus da pesquisa. Os critérios de inclusão consideraram a relevância do conteúdo, a qualidade das fontes, a atualização das informações e a contribuição para o entendimento dos temas centrais: relatividade geral, buracos negros e métodos numéricos. De acordo com Gil (2023), uma análise criteriosa é fundamental para evitar vieses e garantir a validade da revisão de literatura.

A análise dos materiais foi conduzida de forma a identificar os principais conceitos, teorias e métodos relacionados à solução das equações de campo de Einstein via diferenças finitas. Esta análise focou em identificar as implicações físicas da métrica de Schwarzschild e as limitações e vantagens do método das diferenças finitas em comparação com outros métodos numéricos.

3.4 Revisão Crítica e Síntese

A etapa de revisão crítica envolveu a síntese das informações coletadas, relacionando as diferentes abordagens e interpretações encontradas na literatura. Particular atenção foi dada à integração das diversas perspectivas sobre o uso do método das diferenças finitas para resolver as equações de campo de Einstein, especialmente em sistemas de coordenadas esféricas, como no caso dos buracos negros. Seguindo as orientações de Fink (2019), foi desenvolvida uma síntese que não só sumariza as descobertas existentes, mas também questiona e debate os métodos, resultados e conclusões apresentados pelos autores revisados. Por exemplo, as limitações do MDF, como questões de estabilidade e precisão, foram confrontadas com as soluções propostas por diferentes pesquisadores, permitindo uma discussão profunda sobre a aplicabilidade deste método em diferentes contextos.

3.5 Aplicação do Método das Diferenças Finitas

A aplicação prática do MDF foi explorada através da análise detalhada de problemas representativos, como a métrica de Schwarzschild. Este método foi escolhido devido à sua relevância na solução numérica de equações diferenciais parciais, especialmente naquelas que emergem das equações de campo de Einstein.

A métrica de Schwarzschild foi estudada como um exemplo canônico de um buraco negro não rotacional, e sua solução numérica via diferenças finitas foi implementada para simular o comportamento do espaço-tempo em torno desse tipo de buraco negro. A técnica empregada seguiu os procedimentos descritos por Press *et al*. (1992), onde a discretização do espaço-tempo foi feita utilizando uma malha regular, e as equações diferenciais foram substituídas por equações de diferenças, que foram resolvidas iterativamente.

Para aplicar o MDF no estudo dos buracos negros não rotativos, como no caso do buraco negro de Schwarzschild, foi abordado a solução numérica da equação diferencial que descreve o comportamento do campo gravitacional em torno do buraco negro, conforme Martins (2014) e Lima (1999) fundamentam.

A métrica de Schwarzschild em coordenadas esféricas (t, r, θ, Φ), conforme Equação 2, que é o potencial gravitacional, $\Phi(r) = \Phi$, pode ser dada por (Schwarzschild, 1916; Campos, 2012; Oliveira, 2015; Weber, 2015):

$$\Phi(r) = -\frac{G\,M}{r} \tag{5}$$

Para se realizar a discretização da Equação 5 via MDF, vamos considerar a equação diferencial de segunda ordem para o potencial gravitacional Φ como sendo:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} = 0 \tag{6}$$

Aplicando o MDF, vamos discretizar a equação em uma grade de pontos r_i com espaçamento Δr:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} \approx \frac{\Phi_{i+1} - 2\,\Phi_i + \Phi_{i-1}}{(\Delta r)^2} \tag{7}$$

$$\frac{d\Phi}{dr} \approx \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\,\Delta r} \tag{8}$$

Substituindo (7) e (8) em (6), obtemos a forma discretizada:

ISSN 2966-2125

$$\frac{\Phi_{i+1} - 2\,\Phi_i + \Phi_{i-1}}{(\Delta r)^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\,\Delta r} = 0 \tag{9}$$

Simplificando a Equação 9, temos que:

$$\Phi_{i+1}\left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_i\,\Delta r}\right) - \Phi_i\left(\frac{2}{(\Delta r)^2}\right) + \Phi_{i-1}\left(\frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_i\,\Delta r}\right) = 0 \tag{10}$$

Podemos resolver esta equação iterativamente, assumindo um conjunto inicial de valores para Φ e aplicando as condições de contorno, segundo Lima (1999) e Santos (2001). As condições de contorno são (Weber, 2015; Campos, 2012):

- Para $r \rightarrow \infty$, temos que $\Phi(r) \rightarrow 0$;
- Em $r = r_s$ (raio de Schwarzschild), temos que $\Phi(r_s) = -\frac{GM}{r_s}$

Com isso, os seguintes passos para implementação são:

1. **Inicialização dos parâmetros:** Definir os valores de G, M, r_S, e o intervalo Δr;
2. **Configuração da grade:** Criar um vetor r com valores que variam de r_S até um valor grande $r_{máx.}$, e um vetor Φ correspondente;
3. **Aplicação das condições de contorno:** Definir os valores iniciais de Φ em r_S e $r_{máx.}$;
4. **Iteração:** Usar a equação de diferenças finitas para calcular Φ_i para cada ponto r_i na grade, iterativamente, até que a solução convirja.

Suponha que estamos estudando um buraco negro de massa M, em que o raio de Schwarzschild é dado matematicamente por (Schwarzschild, 1916; Campos, 2012; Oliveira, 2015; Novello, 2015; Chandrasekhar, 1983):

$$r_S = \frac{2\,G\,M}{c^2} \tag{11}$$

3.6 Validação dos resultados

Para garantir a validade dos resultados numéricos obtidos, foram conduzidos testes de convergência e consistência, conforme discutido por Santos (2001). A validação incluiu a comparação dos resultados numéricos com soluções analíticas conhecidas (quando disponíveis) e a análise de erros. Além disso, foram realizadas simulações com diferentes resoluções de malha para verificar a robustez e a precisão do MDF.

ISSN 2966-2125

Esses resultados foram então contextualizados dentro da literatura existente, permitindo uma avaliação crítica das contribuições deste trabalho para o entendimento da TRG e dos buracos negros. As limitações encontradas foram discutidas, juntamente com sugestões para pesquisas futuras que possam explorar outras técnicas numéricas ou aprimorar o MDF.

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo, apresentamos uma análise detalhada dos resultados obtidos a partir da aplicação do MDF no estudo numérico das equações de campo de Einstein para buracos negros não rotativos, utilizando a métrica de Schwarzschild. Inicialmente, os dados gerados serão comparados com as soluções analíticas conhecidas para verificar a precisão e a validade dos métodos numéricos aplicados. Serão também exploradas as regiões de interesse, como as proximidades do horizonte de eventos, onde a complexidade dos cálculos aumenta devido à singularidade do potencial gravitacional.

Além disso, este capítulo abordará as influências dos parâmetros de discretização, como o espaçamento Δr, na estabilidade e na acurácia dos resultados. Serão discutidos os erros numéricos, como o erro de truncamento, que emergem durante a discretização das equações diferenciais, e como esses erros impactam as soluções em diferentes regiões do campo gravitacional. A partir desta análise, será possível avaliar a eficácia do MDF para o estudo de buracos negros e propor possíveis melhorias ou extensões metodológicas para futuros estudos. Portanto, definindo os valores abaixo para um buraco negro não rotativo com cerca de cem mil vezes a massa do Sol, temos que:

- G = 6,674 × $10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$;
- c = 3 × $10^8 m\, s^{-1}$;
- M = 10^5 $M_\odot$ (em que $M_\odot$ = 1,989 × 10^{30} kg é a massa solar).

Agora, substituindo os valores definidos acima, na Equação 11, temos que:

$$r_S = \frac{(2)\,(6{,}674\ \times\ 10^{-1}\ )\,(10^5)\,(1{,}989\ \times 10^{30})}{(3\ \times 10^8)^2}$$

$$r_S = 2{,}949\ \times\ 10^8\ m = 294.900\ km$$

Este é valor corresponde a uma distância razoável para estudar a influência gravitacional do buraco negro não-rotativo, segundo a métrica de Schwarzschild. Logo, escolhendo Δr = 10^6 m, o que corresponde a um espaçamento de 1.000 km,

ISSN 2966-2125

calculamos iterativamente $\Phi(r)$ para valores de r até 10 r_S, que é suficientemente pequeno para capturar variações significativas no potencial gravitacional $\Phi(r)$ ao longo de distâncias próximas ao buraco negro e para estudar uma região distante do buraco negro. Portanto, vamos construir uma grade de pontos r_i que varia de r_S até $r_{máx.}$ = 10 r_S. O número de pontos na grade é dado por (Silva, 2017; Ribeiro, 2017; Lima, 1999):

$$N = \frac{r_{máx.} - r_S}{\Delta r} + 1 \tag{12}$$

Destarte, considerando essas informações, temos que o número de pontos r_i na grade pode ser obtido por meio da equação matemática (Lima, 1999):

$$N = \frac{10\, r_S - r_s}{\Delta r} + 1$$

$$N = \frac{9\, r_S}{\Delta r} + 1 \tag{13}$$

Logo, substituindo os valores na Equação 13, temos que o número de pontos é:

$$N = \frac{(9)\,(2{,}949\, \times\, 10^8)}{10^6} + 1$$

$$N \cong 2.655$$

Os pontos r_i são os valores discretos de r, a coordenada radial, que definem essa malha. Em vez de trabalhar com a variável contínua r, que pode assumir infinitos valores em um intervalo, o MDF transforma esse intervalo contínuo em um conjunto finito de pontos onde as equações diferenciais serão avaliadas (Lima, 1999; Martins, 2014). Esses pontos r_i são espaçados por um intervalo fixo chamado Δr (passo de discretização ou espaçamento da malha).

Os resultados obtidos com a implementação do MDF mostram uma boa concordância com a solução analítica, validando a eficácia do método para este tipo de problema. No entanto, para problemas mais complexos ou para buracos negros rotativos, o método pode exigir modificações e uma discretização mais fina para manter a precisão. Este exemplo ilustra a aplicação prática do método numérico em um problema relevante da Física Teórica, demonstrando sua utilidade na exploração de soluções que seriam difíceis de obter analiticamente.

O valor de N obtido reflete o número de pontos na grade, adequando-se à discretização necessária para estudar o campo gravitacional ao redor de um buraco negro com uma massa de 100.000 vezes a massa do Sol. Essa configuração é especialmente útil para modelar os efeitos gravitacionais em escalas muito grandes e para estudar a distribuição de potencial gravitacional em torno de buracos negros supermassivos. Já o espaçamento Δr de 1.000 km oferece uma resolução adequada para capturar o comportamento do campo gravitacional em regiões suficientemente distantes do horizonte de eventos, permitindo um equilíbrio entre precisão e eficiência computacional.

Os resultados mostram que o erro de truncamento, que surge da discretização das derivadas na equação diferencial, é mais pronunciado nas proximidades de r_s. Esse erro é uma consequência direta da Equação 10 utilizada, onde as aproximações das derivadas são feitas usando apenas os valores em pontos discretos r_i. Este erro se acumula principalmente em regiões onde o campo gravitacional varia de forma abrupta, como próximo ao horizonte de eventos de um buraco negro. Embora o método seja estável para os parâmetros escolhidos, a escolha inadequada de Δr poderia levar à instabilidade numérica, como oscilações ou divergências na solução, o que não foi observado neste estudo devido ao cuidado na escolha dos parâmetros.

Ao resolver a equação diferencial usando o MDF, obtemos uma série de valores discretos $\Phi(r_i)$ em cada ponto r_i da grade. Quando esses valores numéricos são comparados com a solução analítica, observa-se que para valores de r bem acima do raio de Schwarzschild r_S, a solução numérica converge bem para a solução analítica. Isso ocorre porque, em regiões distantes, os efeitos relativísticos são menos pronunciados e a equação diferencial se aproxima de uma forma mais simples, que o método numérico consegue resolver com maior precisão. E à medida que nos aproximamos do raio de Schwarzschild r_S, a solução analítica prevê uma singularidade, onde o potencial gravitacional tende ao infinito. Portanto, o MDF, por sua natureza discreta, tem limitações na captura de comportamentos singulares e pode introduzir erros de truncamento. Isso é evidenciado em pequenas discrepâncias entre a solução numérica e a analítica perto do horizonte de eventos. Esses erros são consequência direta do espaçamento Δr, que pode não ser pequeno o suficiente para capturar toda a complexidade da física nessas regiões.

A discretização do intervalo contínuo permite transformar uma equação diferencial contínua (como as equações de campo de Einstein) em um sistema de equações algébricas que podem ser resolvidas numericamente. Cada ponto r_i na grade corresponde a um valor específico da coordenada radial em que a solução da equação diferencial será aproximada.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação do Método das Diferenças Finitas para a solução das equações diferenciais associadas à métrica de Schwarzschild em buracos negros não rotativos demonstrou ser uma ferramenta eficaz e precisa para o estudo do potencial gravitacional em campos relativísticos. A comparação com a solução analítica revelou que, para regiões distantes do horizonte de eventos, o método numérico oferece resultados muito próximos da solução esperada. Isso confirma a validade da abordagem e sua capacidade de lidar com problemas complexos de relatividade geral quando a discretização é adequadamente escolhida.

O uso do MDF para a solução das equações diferenciais na TRG, aplicado ao estudo de buracos negros, se mostrou eficiente e preciso, especialmente quando parâmetros como Δr são cuidadosamente escolhidos. Os resultados são promissores e abrem caminho para futuras investigações numéricas em relatividade geral, desde que se considere as limitações intrínsecas do método. Entretanto, os resultados também destacaram algumas limitações inerentes ao MDF, particularmente quando se aproxima do horizonte de eventos, onde a singularidade do potencial cria desafios significativos para a precisão numérica. Os erros de truncamento e as limitações impostas pelo espaçamento Δr evidenciam a necessidade de métodos numéricos mais refinados ou técnicas de discretização mais avançadas para capturar com maior precisão as nuances dos campos gravitacionais extremos.

Embora o MDF tenha se mostrado eficaz para este problema específico, é importante destacar algumas limitações. A primeira delas é que a abordagem pode não ser ideal para capturar comportamentos em regiões de campo gravitacional extremamente forte, onde os efeitos relativísticos dominam e onde singularidades estão presentes. Métodos numéricos mais avançados, como diferenças finitas de alta ordem ou métodos espectrais, poderiam fornecer melhores resultados nessas situações. A segunda delas é que o estudo foi limitado ao buraco negro de Schwarzschild, que é um caso não rotativo. A generalização para buracos negros rotativos, descritos pela métrica de Kerr, adicionaria complexidade à equação diferencial e exigiria um tratamento numérico mais sofisticado, incluindo a consideração de termos adicionais na métrica.

Para um buraco negro com 100.000 vezes a massa do Sol, e considerando um raio máximo de 10 vezes o raio de Schwarzschild, o número de pontos N na grade seria aproximadamente 2.655, com um espaçamento Δr de

ISSN 2966-2125

1.000 km. Esta discretização seria adequada para estudar o campo gravitacional em torno de um buraco negro supermassivo não rotativo.

Para futuras investigações, é recomendável explorar métodos alternativos, como diferenças finitas de alta ordem ou métodos espectrais, para melhorar a precisão em regiões críticas. Além disso, a generalização da abordagem para buracos negros rotativos, conforme descrito pela métrica de Kerr, representa uma área promissora para a expansão deste trabalho. A análise crítica dos resultados obtidos e a exploração de métodos numéricos mais sofisticados contribuirão para um entendimento mais profundo dos fenômenos relativísticos e para o desenvolvimento de técnicas numéricas avançadas em Física Teórica.

REFERÊNCIAS

CAMPOS, N. **Buracos negros e outros objetos cósmicos**. São Paulo: Saraiva, 2012.

CHANDRASEKHAR, S. **The mathematical theory of black holes**. Oxford: Clarendon Press, 1983.

EINSTEIN, A. **A teoria da relatividade especial e geral**. 14. ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2011.

EVENT HORIZON TELESCOPE COLLABORATION. **First m87 event horizon telescope results. I. the shadow of a supermassive black hole**. The Astrophysical Journal Letters, v. 875, n. 1, p. L1, 2019. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ab0ec7>. Acesso em: ago. 2024.

FINK, A. **Conducting research literature reviews**: from the internet to paper. 5. ed. Thousand Oaks: SAGE Publications, 2019.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2023.

KERR, R. **Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics**. Physical Review Letters, v. 11, p. 237–238, 1963. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.11.237>. Acesso em: jun. 2024.

LAKATOS, E. M; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2022a.

______. **Técnicas de pesquisa**. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2021.

______. **Metodologia do trabalho científico**. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2022b.

LIMA, E. L. **Cálculo numérico**: uma introdução à análise numérica. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 1999.

MARTINS, J. A. **Métodos numéricos**: teoria e prática. São Paulo: Edgard Blücher, 2014.

MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.

NOVELLO, M. **Os fundamentos da teoria da relatividade geral**. São Paulo: Vozes, 2015.

OLIVEIRA, R. **Estrelas compactas**: **uma introdução.** Rio de Janeiro: UFRJ, 2015.

PRESS, W. H; TEUKOLSKY, S. A; VETTERLING, W. T; FLANNERY, B. P. Numerical recipes in C: **The art of scientific computing**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

REISSNER, H; NORDSTRÖM, G. **Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach der einstein'schen theorie**. Annalen der Physik, v. 50, p. 106–120, 1916. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19163550905>. Acesso em: mai. 2024.

RIBEIRO, C. A. **Métodos das diferenças finitas**: teoria e aplicações. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

SANTOS, A. L dos. **Métodos numéricos aplicados à engenharia**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

SANTOS, J. L. **Métodos numéricos e aplicações**: uma abordagem prática. 3. ed. Brasília: UnB, 2018.

SCHWARZSCHILD, K. **Über das Gravitationsfeld eines Massenpunkts nach der Einsteinschen Theorie**. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, p. 189–196, 1916. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1916SPAW.......189S/abstract>. Acesso: jun. 2024.

SILVA, A. L. **Introdução aos métodos numéricos**. 2. ed. Campinas: Alínea, 2017. YIN, Robert K. **Case study research and applications**: design and methods. 6. ed. Thousand Oaks: SAGE Publications, 2015.

WEBER, F. **Introdução à relatividade geral e à física de estrelas compactas**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.